Комплексные многообразия: задачи для экзамена

Студентам выдается по 1-2 задачи из каждого раздела, из рассчета по 2 балла за раздел. Для получения оценки 3, нужно набрать 3 балла, для оценки 4 - 5 баллов, для оценки 5 – 6 баллов.

10.1. Почти комплексные многообразия

Задача 10.1. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, причем I интегрируема в плотном, открытом подмножестве. Докажите, что I интегрируема.

Задача 10.2. Пусть f – голоморфная функция на почти комплексном эрмитовом многообразии (M, I, ω) размерности n. Докажите, что $\frac{-\sqrt{-1}\partial\bar\partial(|f|^2)\wedge\omega^{n-1}}{\omega^n} \geqslant 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда f – константа.

Задача 10.3. Пусть на почти комплексном многообразии (M, I) задана голоморфная функция f, такая, что $|f| = const$. Докажите, что f постоянна.

Задача 10.4 (2 балла). Пусть I – би-инвариантная комплексная структура на группе Ли. Докажите, что она интегрируема.

Задача 10.5. Пусть f – непрерывная функция на комплексном многообразии, голоморфная в открытом, плотном подмножестве. Докажите, что f голоморфна.

Задача 10.6. Пусть $G(p, n)$ есть многообразие Грассманна p-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$, снабженное естественным действием группы $U(n)$, а I – $U(n)$-инвариантная почти комплексная структура. Докажите, что она интегрируема.

Задача 10.7 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Докажите, что комплексная структура I единственна.

Задача 10.8. Пусть Q есть факторпространство $O(2n)/U(n)$, снабженное естественным действием $O(2n)$ слева, а I – $O(2n)$-инвариантная почти комплексная структура. Докажите, что она интегрируема.

Задача 10.9. Пусть X – комплексное многообразие. Докажите, что множество неподвижных точек X_ι антикомплексной инволюции – гладкое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Задача 10.10 (2 балла). Пусть (M, I) – комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $U \subset M$ – плотное, открытое подмножество, а $\Omega \in \Lambda^{n,0}(U)$ – невырожденная $(n, 0)$-форма. Предположим, что Ω замкнута. Докажите, что почти комплексная структура I интегрируема.

10.2. Кэлеровы многообразия, связности и кручение

Задача 10.11 (2 балла). Пусть Ξ – тензор на многообразии M, причем у каждой точки найдется окрестность и на ней связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$. Докажите, что на M найдется связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$.

Задача 10.12 (2 балла). Пусть – многообразие, а $X \subset TM$ – нигде не зануляющееся векторное поле. Найдите связность без кручения такую, что $\nabla(X) = 0$.

Задача 10.13 (2 балла). Пусть – комплексное многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую комплексную структуру (то есть $\nabla I = 0$). Докажите, что для любого почти комплексного многообразия существование такой связности влечет интегрируемость I.

Задача 10.14 (2 балла). Пусть $B \subset TM$ – интегрируемое подрасслоение в TM. Постройте связность без кручения, такую, что $\nabla(B) \subset \Lambda^1 M \otimes B$. Докажите, что для любого расслоения $B \subset TM$, существование такой связности влечет интегрируемость B.

Задача 10.15. Пусть V есть $n+1$-мерное комплексное пространство с невырожденной эрмитовой метрикой с сигнатурой $(n, 1)$, а $B \subset \mathbb{P}V$ проективизация множества всех векторов с отрицательным квадратом. Докажите, что B гомеоморфно шару, и снабжено транзитивным, голоморфным действием группы $G = U(n, 1)$ унитарных эндоморфизмов пространства V. Постройте на (B, I) $U(n, 1)$-инвариантную кэлерову метрику.

Задача 10.16 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Докажите, что такая метрика единственна с точностью до константы.

Задача 10.17. Постройте $U(n)$-инвариантную кэлерову метрику на многообразии Грассмана p-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$.

Задача 10.18 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Докажите, что такая метрика единственна с точностью до константы.

Задача 10.19. Пусть M – комплексное многообразие, ∇ – связность без кручения, сохраняющая I, а ϕ – вещественная функция, такая, что симметрическая 2-форма $\operatorname{Hess}(\phi)$, полученная симметризацией $\nabla^2(\phi)$, положительно определена.[1] Докажите, что $dd^c\phi$ – кэлерова форма.

Определение 10.1. Вещественное векторное поле на многообразии называется **голоморфным**, если соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов состоит из голоморфных преобразований

Задача 10.20. Пусть (M, I) комплексное многообразие, снабженное связностью без кручения ∇, причем $\nabla I = 0$, а $X \in TM$ – векторное поле. Докажите, что X голоморфно тогда и только тогда, когда $\nabla X \in \Lambda^1(M) \otimes TM$, рассмотренное как эндоморфизм TM, комплексно линейно.

10.3. Теория Ходжа

Задача 10.21 (2 балла). Пусть θ – замкнутая, не точная 1-форма на компактном, n-мерном вещественном многообразии. Докажите, что $d_\theta(\eta) := d\eta + \theta \wedge \eta$ удовлетворяет $d_\theta^2 = 0$. Докажите, что $d_\theta : \Lambda^{n-1}(M) \longrightarrow \Lambda^n(M)$ сюрьективно.

Задача 10.22. Пусть H – точная 3-форма на многообразии M, а $d_H(\eta) := d\eta + H \wedge \eta$. Докажите, что $d_H^2 = 0$. Докажите, что $\frac{\ker d_H}{\operatorname{im} d_H} \cong H^*(M)$

[1] Такая функция называется **выпуклой**.

Задача 10.23. Пусть η – (1,1)-форма с компактным носителем на $M \cong \mathbb{C}$. Всегда ли найдется $f \in C^\infty M$ с компактным носителем, такая, что $\eta = dd^c f$?

В следующих задачах, M есть почти комплексное многообразие, а $d = \oplus_p d^{p,1-p}$ есть разложение дифференциала де Рама по типам Ходжа.

Задача 10.24. Докажите, что $(d^{0,1})^3 = 0$.

Задача 10.25. Докажите, что $[d^{2,-1}, \{d^{1,0}, d^{1,0}\}] = 0$.

Задача 10.26. Докажите, что $[d^{2,-1}, \{d^{1,0}, d^{0,1}\}] = 0$.

Задача 10.27. Пусть W – оператор Вейля, действующий на (p,q)-формах как $W(\eta) = \sqrt{-1}(p-q)\eta$. Докажите, что $I^{-1}dI - [W,d] = 0$ тогда и только тогда, когда I интегрируема.

Задача 10.28. Пусть η – замкнутая $(1,1)$-форма на шаре в $\mathbb{C}^n$, гладко продолжающаяся на границу. Докажите, что $\eta = dd^c f$, для какой-то функции f.

Задача 10.29. Пусть (M, I, ω) – почти комплексное эрмитово многообразие, причем $d\omega = 0$. Найдите размерность супералгебры Ли, порожденной L, Λ, d, где $L(\eta) = \omega \wedge \eta$, а $\Lambda = *L*$.

Задача 10.30. Пусть (M, I, ω) – n-мерное почти комплексное эрмитово многообразие. **Формой Ли** M называется 1-форма $\theta := \Lambda(d\omega)$. Докажите, что

$$[L, d^*](f) = Idf + (n-1)I(\theta)$$

для любой функции f на M.

10.4. Векторные расслоения и пучки

Задача 10.31. Докажите, что любое гладкое комплексное расслоение ранга 1 на сфере S^n, $n \geqslant 3$, тривиально.

Определение 10.2. Пусть F – пучок на топологическом пространстве. а f – сечение F. **Носитель** f есть множество всех точек, у которых нет окрестности U такой, что $f\big|_U = 0$. Обозначим за $F_c(U)$ группу сечений F с компактным носителем.

Задача 10.32. Пусть F – тонкий пучок на многообразии. Докажите, что соответствие $U \longrightarrow F_c(U)^*$, ставящее открытому множеству U в соответствие двойственное пространство к $F_c(U)$, задает пучок F_c^*.

Задача 10.33 (2 балла). Решите предыдущую задачу. Предположим, что $0 \to A \to B \to C \to 0$ точная последовательность пучков $C^\infty(M)$-модулей. Докажите, что $0 \to C_c^* \to B_c^* \to A_c^* \to 0$ – точная последовательность пучков.

Задача 10.34 (2 балла). Пусть M – компактное риманово многообразие, а $\mathcal{H}^i$ – пучок гармонических i-форм. Докажите, что есть точная последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^i \longrightarrow \Lambda^i(M) \xrightarrow{\Delta} \Lambda^i(M) \longrightarrow 0$$

Задача 10.35. Докажите, что на комплексной кривой M следующая последовательность пучков точна.

$$\mathcal{O}_M \oplus \bar{\mathcal{O}}_M \longrightarrow C^\infty_{\mathbb{C}}(M) \xrightarrow{dd^c} \Lambda^2(M, \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

Задача 10.36. Предположим, что на компактном комплексном многообразии M сечения голоморфного расслоения B ранга k разделяют точки. Предположим к тому же, что естественное отображение $\Gamma_M(B) \longrightarrow \Gamma_M(B/\mathfrak{m}_x B)$ сюрьективно для каждого $x \in M$, где $B/\mathfrak{m}_x B$ есть пучок-небоскреб ранга k, полученный из B домножением на $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}_x$. Постройте голоморфное вложение из M в многообразие Грассманна $G(k,N)$ k-мерных плоскостей в $\mathbb{C}^N$, для какого-то N.

Задача 10.37 (2 балла). Пусть M – односвязное комплексное многообразие, которое удовлетворяет $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$. Докажите, что любое линейное расслоение над M допускает плоскую связность, совместимую с голоморфной структурой.

Определение 10.3. Плюрисубгармоническая функция это вещественнозначная функция на комплексном многообразии, такая, что $dd^c f$ есть кэлерова форма.

Задача 10.38. Пусть L – положительное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии M, а f – голоморфное сечение L, зануляющееся в Z. Докажите, что $|f|^{-1}$ плюрисубгармонична на $M \backslash Z$.

Задача 10.39. Пусть f – плюрисубгармоническая функция на комплексном многообразии. Докажите, что у f нет локальных максимумов.

Задача 10.40. Пусть L – голоморфное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии M, снабженное эрмитовой метрикой, X – подмножество в тотальном пространстве $\operatorname{Tot} L$, состоящее из ненулевых векторов, а $\phi: X \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция, переводящая вектор $l \in \operatorname{Tot} L$ в $|l|^2$. Докажите, что $dd^c \log \phi = -\pi^* \Theta_L$, где $\pi: X \longrightarrow M$ есть проекция, а Θ_L – кривизна L.