Векторные расслоения, лекция 10: связность Эресманна

Миша Вербицкий

1 декабря, 2013

матфак ВШЭ и НМУ

Главные G-расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции задаются гладкими отображениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – топологическое пространство, снабженное свободным, непрерывным действием группы Ли G, а факторпространство M/G с топологией фактора хаусдорфово. В такой ситуации проекция $M \to M/G$ называется **главным G-расслоением**. Если на M и на M/G заданы согласованные структуры гладкого многообразия, а действие $G \times M \to M$ гладко, главное G-расслоение называется **гладким**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тривиализация** главного G-расслоения $M \stackrel{\pi}{\to} N = M/G$ есть выбор сечения π, то есть такого отображения $N \stackrel{s}{\to} M$, что $s \circ \pi = \mathsf{Id}_N$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Гладкие главные G-расслоения локально тривиальны**.

Присоединенные расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X, Y – топологические пространства с действием группы G. Определим $X \times_G Y$ как $X \times Y/G$ с топологией фактора, где g действует на $X \times Y$ "диагонально", то есть по формуле $g(x,y) = (gx, gy)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть V – представление группы G, а E – главное G-расслоение над M. **Тогда аддитивная структура на V определяет структуру векторного расслоения над M на произведении $E \times_G V$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное расслоение $E \times_G V$ называется **присоединенным векторным расслоением**, или **ассоциированным векторным расслоением**, связанным с E и представлением V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $B = E \times_G V$ – векторное расслоение, которое получено из главного G-расслоения и представления V группы G. Тогда G называется **структурной группой расслоения B**.

Гладкие субмерсии (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: M \to M'$ – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке M дифференциал $D\pi$ сюрьективен.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\pi: M \to M'$ – гладкая субмерсия. Тогда у каждой точки $m \in M$ есть окрестность $U \cong V \times W$, где U, W – гладкие многообразия, такая, что $\pi\big|_U$ **есть проекция на W.**

Доказательство: Теорема о неявной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вертикальное касательное пространство** $T_\pi M$ субмерсии $\pi: M \to M'$ есть ядро $D\pi$.

Связность Эресманна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: M \to N$ – гладкая субмерсия, а $T_\pi M \subset TM$ – послойное ("вертикальное") касательное расслоение. **Связность Эресманна** есть подрасслоение $B \subset TM$ такое, что $T_\pi M \oplus B = TM$. В такой ситуации, B называется **горизонтальное касательное расслоение** для субмерсии, и обозначается $T_{\mathrm{hor}}M$ или $T_\nabla M$, где ∇ обозначает связность Эресманна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Проекция осуществляет изоморфизм слоев $T_{\mathrm{hor}}M\Big|_x$ и $T_{\pi(x)}N$. Поэтому $T_{\mathrm{hor}}M = \pi^*TN$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \in TN$ – векторное поле. Соответствующее векторное поле $\pi^*X \in \pi^*TM = T_{\mathrm{hor}}M$ называется **горизонтальным подъемом X в $T_{\mathrm{hor}}M$**.

Теорема Эресманна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Параллельный перенос** по связности $T_{\mathsf{hor}}M \subset TM$ есть диффеоморфизм Γ_t слоев π, параметризованных отрезком $t \in [0,1]$, такой, что траектория точки $\Gamma_t(z)$ касается $T_{\mathsf{hor}}M$ для всех $t \in [0,1]$.

ТЕОРЕМА: Пусть $\pi : M \to N$ – гладкая субмерсия с компактными слоями, а $T_{\mathsf{hor}}M \subset TM$ – связность Эресманна. Рассмотрим гладкий путь $\gamma : [0,1] \to N$ с началом в $x \in N$. **Тогда параллельный перенос вдоль γ существует и однозначно определен.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Теорема о существовании и единственности решений ОДУ. ■

СЛЕДСТВИЕ: (теорема Эресманна)
Пусть $\pi : M \to N$ – гладкая субмерсия с компактными слоями и связной базой. **Тогда все слои π диффеоморфны.**

Доказательство. Шаг 1: Построим на π связность Эресманна. Для этого выберем риманову метрику, пользуясь разбиением единицы, и напишем $T_{\mathsf{hor}}M = T_\pi M^\perp$.

Шаг 2: Теперь все слои отождествляются параллельными переносами. ■

Голономия связности Эресманна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: M \to N$ - гладкая субмерсия, а ∇ – связность Эресманна. **Группа голономий** Hol_x связности Эресманна в точке $x \in N$ есть подгруппа группы G диффеоморфизмов $\pi^{-1}(x)$, порожденная операциями параллельного переноса вдоль всех петель с началом и концом в x. **Локальная группа голономий** есть подгруппа G, порожденная операциями параллельного переноса вдоль всех стягиваемых петель с началом и концом в x.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $x, y \in N$ – точки связного многообразия N, а $M \to N$ – гладкая субмерсия с компактными слоями, снабженная связностью Эресманна. Тогда **группы голономий Hol_x и Hol_y изоморфны.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тривиализация** субмерсии $\pi: M \to N$ есть изоморфизм $M \cong N \times F$, такой, что π действует на $M \cong N \times F$ как стандартная проекция. **Тривиальная связность** есть подрасслоение $TF \subset T(F \times N) = TF \oplus TN$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность тривиальна тогда и только тогда, когда ее группа голономий тривиальна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально тривиальная** связность Эресманна есть связность с тривиальной группой локальных голономий.

Форма Фробениуса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение на гладком многообразии есть гладкое подрасслоение $B \subset TM$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\Pi : TM \to TM/B$ – проекция, а $x, y \in B$ – векторные поля. Тогда $[fx, y] = f[x, y] - D_y(f)x$. Следовательно,. $\Pi([x, y])$ **зависит от** x, y $C^\infty(M)$**-линейно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Построенное отображение $[B, B] \to TM/B$ называется **форма Фробениуса** ("Frobenius bracket"); это косо-симметричная $C^\infty(M)$-линейная 2-форма на B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение $B \subset TM$ называется **инволютивным**, если форма Фробениуса равна нулю, и **интегрируемым**, если локально B можно отождествить с $T_\pi M$ для какой-то субмерсии π.

Теорема Фробениуса: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Оно **является инволютивным тогда и только тогда, когда оно интегрируемо**.

Кривизна связности Эресманна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кривизна связности Эресманна** для субмерсии $\pi : M \to N$ есть форма Фробениуса подрасслоения $T_{\text{hor}}M \subset TM$,

$$\Phi : \Lambda^2 T_{\text{hor}}M \to T_\pi M.$$

Связность Эресманна называется **плоской**, если $\Phi = 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть $\pi : M \to N$ – субмерсия с компактными слоями. Тогда связность Эресманна ∇ на π **локально тривиальна тогда и только тогда, когда она плоская.**

Доказательство. Шаг 1: Тривиальная связность плоская, а локально тривиальная связность тривиальна в окрестности каждой точки базы; значит, она тоже плоская.

Шаг 2: Если связность плоская, локально в окрестности U_z каждой точки слоя $Z := \pi^{-1}(x)$ есть субмерсия со слоями, которые касательны к $T_{\text{hor}}M$. Поскольку Z компактно, можно выбрать из $\{U_z\}$ конечное подпокрытие, что даст **субмерсию со слоями, касательными $T_{\text{hor}}M$, на какой-то окрестности Z.**

Шаг 3: Поскольку такая окрестность содержит $\pi^{-1}(U_x)$, для какого-то открытого множества $U \ni x$, связность ∇ тривиальна над U. ■

1-джеты сечений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: X \to Y$ – гладкая субмерсия, а $s_1, s_2: Y \to X$ – сечения π, которые проходят через точку $x \in X$. Говорится, что s_1 и s_2 **имеют одинаковый 1-джет в x**, если $T_x S_1 = T_x S_2$, где $S_1 = \operatorname{im} s_1$ и $S_2 = \operatorname{im} s_2$. Пространство классов эквивалентности обозначается $J^1_x(X, \pi)$, а объединение $J^1_x(X)$ по всем $x \in X$ называется **пространство 1-джетов сечений π**, и обозначается $J^1(X, \pi)$. Мы рассматриваем на $J^1(X, \pi)$ топологию, индуцированную C^1-топологией на пространстве сечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение над X, **Аффинное расслоение с линеаризацией B** есть гладкое расслоение $E \to X$, снабженное послойным действием $B \times_X E \to E$, перестановочным с проекцией на X, и индуцирующее изоморфизм между слоями B и слоями E.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим естественную проекцию $\pi_1: J^1(X, \pi) \to X$ из пространства 1-джетов сечений. Тогда **π_1 есть аффинное расслоение с линеаризацией $\operatorname{Hom}(\pi^* TY, T_\pi X)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Локально в окрестности каждой точки X субмерсия тривиальна по теореме о неявной функции. Поэтому 1-джеты отождествляются с подпространствами в $T_x X$, которые изоморфно проектируются на $T_\pi(x) Y$. Такие пространства отличаются на $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(T_{\pi(x)} Y, T_\pi X\Big|_x\right)$.

■

1-джеты сечений и связности Эресманна

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $T_{\mathsf{hor}}X \subset TX$ – связность Эресманна на гладкой субмерсии $\pi: X \to Y$. Тогда **для каждой точки $x \in X$, в какой-то окрестности $U \ni \pi(x)$ существует сечение $s: U \to X$, содержащее x,** и касательное к $T_{\mathsf{hor}}X$; очевидно, **1-джет такого сечения в x задается этим условием однозначно.**

ТЕОРЕМА: Это задает **биекцию между множеством связностей Эресманна и множеством сечений проекции $\pi_1: J^1(X, \pi) \to X$.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\pi_1: X_1 \to M, \pi_2: X_2 \to M, \pi_3: X_3 \to M$ – гладкие расслоения, а $\Phi: X_1 \times_M X_2 \to X_3$ – морфизм гладких расслоений, то есть гладкое отображение, перестановочное с проекцией в M. **Тогда Φ индуцирует морфизм джет-расслоений $J^1(\Phi): J^1(X_1, \pi_1) \times J^1(X_2, \pi_2) \to J^1(X_3, \pi_3)$.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (*): Пусть на π_i заданы связности ∇^i, определяющие сечения s_i проекций $J^1(X_i, \pi_i) \to X_i$. Мы говорим, что отображение Φ **совместимо со связностями**, если $J^1(\Phi)(s_1 \times s_2) = s_3$.

Линейные расслоения и 1-джеты

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – векторное расслоение со связностью ∇. Тогда для каждой точки $b \in \operatorname{Tot} B$, в какой-то окрестности $U \ni \pi(b)$ **существует сечение $s: U \to \operatorname{Tot} B$, содержащее b, и удовлетворяющее $\nabla s\Big|_{\pi(b)} = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользуемся формулой Лейбница: $\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi$. Выбрав $f = 0$ в $m := \pi(b)$, мы получим $\nabla(f\xi)\Big|_m = df \otimes \xi$, что позволяет **решить уравнения $\nabla(\sum f_i\xi_i)\Big|_m = v$, $f_i(m) = 0$ для любого $v \in \Lambda^1_m M \otimes B\Big|_m$.** Теперь возьмем любое сечение $\beta \in B$, проходящее через b, решим уравнение $\nabla(\sum f_i\xi_i)\Big|_m = -\nabla\beta\Big|_m$, и возьмем $s = \beta + \sum f_i\xi_i$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: 1-джет сечения $s: U \to \operatorname{Tot} B$, удовлетворяющего $\nabla s\Big|_{\pi(b)} = 0$, **задается однозначно.** Действительно, **если два джета сечений удовлетворяют этому уравнению, их производные в b равны.** Это задает сечение расслоения 1-джетов $J^1(\operatorname{Tot} B, \pi) \to \operatorname{Tot} B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – векторное расслоение со связностью ∇, а $s: \operatorname{Tot} B \to J^1(\operatorname{Tot} B, \pi)$ – сечение расслоения 1-джетов, построенное выше. Соответствующая связность Эресманна называется **линейной**.

Линейные связности

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение над M, $\operatorname{Tot} B$ – его тотальное пространство, $\operatorname{Tot} C^\infty M = \mathbb{R} \times M$ – тотальное пространство тривиального расслоения, снабженное тривиальной связностью, а $\operatorname{Tot} B \times \operatorname{Tot} B \xrightarrow{\mu} \operatorname{Tot} B$ и $\operatorname{Tot} C^\infty M \times \operatorname{Tot} B \xrightarrow{v} \operatorname{Tot} B$ – морфизмы гладких расслоений, заданные аддитивной структурой на B и умножением на функции. Рассмотрим связность Эресманна ∇ на $\operatorname{Tot} B \to M$. **Тогда ∇ – линейная связность $\Leftrightarrow$ отображения μ и v совместимы со связностью в смысле определения (*).**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нужно проверить линейность связности и формулу Лейбница; **сделайте это самостоятельно.** ■

Связности на главных расслоениях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, $E \to M$ – главное G-расслоение, а $T_{\mathsf{hor}}E \subset TE$ – связность Эресманна. Она называется **G-инвариантной**, если для любого $g \in G$ и $X \in T_{\mathsf{hor}}E$, поле $g(X)$ лежит в $T_{\mathsf{hor}}E$. **Связность на главном G-расслоении** есть G-инвариантная связность Эресманна.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X – топологическое пространство, на котором группа G действует непрерывно, свободно и транзитивно (такое пространство называется **торсором над G**). Рассмотрим группу $H = \operatorname{Aut}_G(X)$ гомеоморфизмов X, коммутирующих с действием G. **Тогда $H = G$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Отождествим X с G, которое слева действует на себе, выбрав в X отмеченную точку. Поскольку левое действие G коммутирует с правым, **мы получаем вложение $\rho: G \to \operatorname{Aut}_G(X)$.** С другой стороны, **каждый автоморфизм X задается образом одной точки, и поэтому ρ сюрьективен.** ■

СЛЕДСТВИЕ: **Группа голономии G-инвариантной связности на главном G-расслоении есть подгруппа G.**

G-инвариантные векторные поля

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X – гладкий торсор над группой Ли G. Тогда **пространство $\operatorname{Lie}_G(X)$ G-инвариантных векторных полей на X канонически отождествляется с алгеброй Ли G.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Это инфинитезимальная версия изоморфизма $\operatorname{Aut}_G X = G$; доказывается точно также.

Отождествим X с G, которое слева действует на себе, выбрав в X отмеченную точку. Поскольку левое действие G коммутирует с правым, **мы получаем вложение $\rho: \mathfrak{g} \hookrightarrow \operatorname{Lie}_G(X)$.** С другой стороны, **каждое G-инвариантное векторное поле на X задается своим значением в одной точке, и поэтому ρ сюрьективен.** ■

Пространство связностей

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\mathcal{A}$ – пространство связностей Эресманна на $M \stackrel{\pi}{\to} N$. Тогда **$\mathcal{A}$ является аффинным пространством с линеаризацией $\operatorname{Hom}(\pi^* TN, T_\pi M)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $s, s' : M \to J^1(M, \pi)$ два сечения расслоения 1-джетов сечений π. Тогда $s - s'$ – сечения соответствующего аффинного расслоения $\operatorname{Hom}(\pi^* TY, T_\pi X)$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $M \stackrel{\pi}{\to} N$ – главное G-расслоение, а $\mathcal{A}$ – пространство связностей на π. Тогда $\mathcal{A}$ есть **аффинное векторное пространство, линеаризация которого W канонически изоморфна $\Lambda^1 N \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли G.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mathcal{A}$ есть аффинное векторное пространство, линеаризация которого W отождествляется с пространством G-инвариантных сечений $\pi^* \Lambda^1 N \otimes T_\pi M$, но $\operatorname{Lie}_G(X) = \mathfrak{g}$. ■

Связности на присоединенных расслоениях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M \to N$ – главное G-расслоение, а X – гладкое многообразие с действием G. Обозначим за $\mathcal{X}$ присоединенное расслоение $\mathcal{X} := M \times_G X$. Пусть $TM = T_\pi M \oplus T_{\mathsf{hor}} M$ – G-инвариантная связность Эресманна, а $v: X \times M \to M \times_G X$ – стандартная проекция. Тогда что $T_{\mathsf{hor}}\mathcal{X} := Dv(T_{\mathsf{hor}}M)$ задает G-инвариантную связность Эресманна на $\mathcal{X} \to N$, которая называется **связность на присоединенном расслоении, индуцированная $T_{\mathsf{hor}}M$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $M \xrightarrow{\pi} N$ – главное G-расслоение, ∇ – связность на π, V – представление G, а $B \to N$ – присоединенное векторное расслоение, $B = M \times_G V$. Рассмотрим связность Эресманна ∇^B на $\operatorname{Tot} B$, индуцированную с ∇. **Тогда это линейная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Надо проверить аддитивность этой связности; но конструкция перестановочна со сложением в V. ■

Связности и структурные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $E \to M$ – главное G-расслоение, V – представление G, а $B := E \times_G V$ – присоединенное векторное расслоение. Напомним, что в такой ситуации G называется **структурной группой** B. Говорится, что линейная связность ∇ на B **согласована со структурной группой** G, если ∇ индуцирована связностью на главном расслоении E. В такой ситуации ∇ называется G-связностью.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство G-связностей на $B := E \times_G V$ аффинно над $\Lambda^1 M \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$; его кривизна лежит в $\Lambda^2 M \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$.