Векторные расслоения 5: связности

5.1. Связности на расслоении

Определение 5.1. Пусть B — гладкое расслоение над M, а $\nabla: \ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ — оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\nabla(fb) = b \otimes df + f \nabla b,$$

для любой функции $f \in C^\infty M$. Тогда ∇ называется **связностью** на расслоении B. Для каждого векторного поля $X \in TM$, результат спаривания $\nabla(b)$ и X обозначается $\nabla_X b \in B$

Задача 5.1. Пусть для каждого векторного поля $X \in TM$ задан оператор ∇_X : $B \longrightarrow B$, причем ∇_X $C^\infty M$-линейно как функция X, и удовлетворяет $\nabla_X(fb) = \operatorname{Lie}_X fb + f \nabla_X b$. Постройте связность на B по ∇_X.

Замечание 5.1. Такой оператор ∇_X называется **ковариантной производной** вдоль X.

Задача 5.2. Постройте связность на тривиальном расслоении $C^\infty M$.

Задача 5.3. Пусть $\nabla: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ – связность. Докажите, что $\nabla(f) = df + af$, где $a \in \Lambda^1 M$ функция.

Задача 5.4 (!). Докажите, что на любом расслоении существует связность.

Указание. Воспользуйтесь разбиением единицы.

Задача 5.5. Пусть ∇_A, ∇_B связности на расслоениях A и B. Зададим на $A \otimes B$ дифференциальный оператор по формуле Лейбница:

$$\nabla(a \otimes b) := \nabla_A(a) \otimes b + a \otimes \nabla_B(b). \tag{5.1}$$

Докажите, что это связность.

Задача 5.6 (*). Пусть $\nabla: \ A \otimes B \longrightarrow A \otimes B \otimes \Lambda^1 M$ – связность на тензорном произведении двух расслоений. Всегда ли ∇ можно получить из связностей на A и B по формуле (5.1)?

Задача 5.7. Пусть $B := B_1 \oplus B_2$ — прямая сумма векторных расслоений, причем на B задана связность ∇. Обозначим за π_1 естественную проекцию из B в B_1. Докажите, что

а.
$$\nabla \circ \pi_1 \otimes \mathsf{Id}_{\Lambda^1 M} : \ B_1 \longrightarrow B_1 \otimes \Lambda^1 M$$
это связность на B_1.

б. Докажите, что каждая связность на B_1 получается таким образом.

Определение 5.2. Дифференциальный оператор из векторного расслоения A в B задается локально как дифференциальный оператор с коэффициентами в $\operatorname{Hom}(A, B)$; расслоение дифференциальных операторов порядка k из A в B есть $\operatorname{Diff}^k(A, B) := \operatorname{Diff}^k(M) \otimes \operatorname{Hom}(A, B)$. В этой ситуации **символ** D есть соответствующий элемент в $\operatorname{Diff}^k(A, B)/\operatorname{Diff}^{k-1}(A, B) = \mathsf{Sym}^k(T^*M) \otimes \operatorname{Hom}(A, B)$.

Задача 5.8. Рассмотрим дифференциал де Рама $d : \ C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1 M$. Докажите, что это дифференциальный оператор первого порядка, а его символ
$$\operatorname{Symb}(d) \in TM \otimes \operatorname{Hom}(C^\infty M, \Lambda^1 M) = TM \otimes T^*M$$
задается тождественным отображением $\mathsf{Id}_{TM} \in \operatorname{End}(TM) = TM \otimes T^*M$.

Задача 5.9. Докажите, что символ $\operatorname{Symb}(\nabla) \in TM \otimes \operatorname{Hom}(B, \Lambda^1 M \otimes B)$ связности ∇ задается тождественным отображением $\mathsf{Id}_{TM} \otimes \mathsf{Id}_B : \ TM \otimes T^*M \otimes \operatorname{Hom}(B, B)$.

Задача 5.10 (!). Докажите, что дифференциальный оператор $\delta : \ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ первого порядка является связностью тогда и только тогда, когда его символ равен $\mathsf{Id}_{TM} \otimes \mathsf{Id}_B$.

5.2. Группа голономии

Задача 5.11 (!). Пусть B – тривиальное расслоение со связностью над $\mathbb{R}$. Докажите, что каждой точки $x \in \mathbb{R}$, и каждого вектора $b_x \in B\big|_x$, в слое расслоения B над x существует и единственно сечение $b \in B$ такое, что $\nabla b = 0$, $b\big|_x = b_x$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой о существовании и единственности решений ОДУ; приведите ее формулировку, и докажите, что из нее выводится утверждение задачи.

Определение 5.3. Пусть $\gamma : \ [0,1] \longrightarrow M$ – гладкий путь на многообразии M, соединяющий x и y, а (B, ∇) – расслоение со связностью. Рассмотрим $b_x \in B_x$, ограничим (B, ∇) на $\gamma([0,1])$, и решим уравнение $\nabla(b) = 0$, где $b \in B\Big|_{\gamma([0,1])}$ с начальным условием $b\big|_x = b_x$. Этот процесс называется **параллельным переносом** вектора b_x вдоль связности, а $b_y := b\Big|_y$ называется **вектором, полученным в результате параллельного переноса** b_x вдоль связности по пути $\gamma : \ [0,1] \longrightarrow M$.

Определение 5.4. Пусть $x \in M$, а (B, ∇) – расслоение со связностью над M. **Группа голономии** связности $\operatorname{Hol}_x(\nabla)$ есть группа эндоморфизмов слоя B_x, порожденная всеми параллельными переносами вдоль путей из x в x, где $x \in M$.

Задача 5.12 (!). Пусть B, ∇ – расслоение со связностью над M, а x, y – точки в одной и той же компоненте связности. Постройте изоморфизм $\operatorname{Hol}_x(\nabla) \longrightarrow \operatorname{Hol}_y(\nabla)$.

Задача 5.13. Найдите расслоение со связностью над S^1, группа голономии которого нетривиальна.

Задача 5.14. Пусть B есть расслоение со связностью над $\mathbb{R}$. Докажите, что группа голономии B тривиальна.

Задача 5.15 (*). Найдите расслоение со связностью над $\mathbb{R}^2$, группа голономии которого нетривиальна.

5.3. Параллельные тензоры

Определение 5.5. Пусть B – расслоение. Сечение тензорной степени

$$\psi \in \underbrace{B \otimes ... B}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{B^* \otimes ... \otimes B^*}_{l \text{ раз}}$$

называется **тензором над** B; когда $B = TM$, такое сечение называется **тензором на** M.

Определение 5.6. Пусть ∇ – связность на B. Определим связность (тоже обозначенную буквой ∇) на двойственном расслоении формулой

$$\langle \nabla_X(b), \xi \rangle + \langle b, \nabla_X(\xi) \rangle = \operatorname{Lie}_X(\langle b, \xi \rangle). \tag{5.2}$$

Задача 5.16 (!). Докажите, что связность на B^*, удовлетворяющая (5.2), существует и единственна.

Задача 5.17. Докажите, что связность на B задает связность на любой тензорной степени B по формуле Лейбница и (5.2).

Задача 5.18 (*). Предположим, что на $B \otimes B^* = \operatorname{End} B$ задана связность ∇, которая удовлетворяет $\nabla(f \circ g) = \nabla(f) \circ g + f \circ \nabla(g)$. Докажите, что ∇ получается из связности на B таким же образом, как в задаче 5.17.

Определение 5.7. Пусть B, ∇ – расслоение со связностью. Тензор ψ на B называется **параллельным**, если $\nabla\psi = 0$. В такой ситуации говорится, что связность **сохраняет тензор** ψ.

Задача 5.19 (!). Пусть B – расслоение. Приведите пример тензора над B, который не может быть параллельным ни для какой связности, но нигде не зануляется.

Задача 5.20. Пусть g – тензор на расслоении B над многообразием M. Постройте связность, которая сохраняет g, если g это:

а. Невырожденная билинейная симметрическая форма.

б. (!) Невырожденная билинейная кососимметрическая форма.

в. (*) Билинейная симметрическая форма постоянного ранга.

г. (*) Линейный оператор с жордановой нормальной формой, которая постоянна вдоль M.

Указание. Воспользуйтесь разбиением единицы.

5.4. Ортогональная группа

Определение 5.8. Алгебра Ли есть векторное пространство A, снабженное антикоммутативной, билинейной операцией $[\cdot,\cdot] : A\otimes A \longrightarrow A$, которая удовлетворяет **тождеству Якоби:** $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]]$.

Замечание 5.2. Тождество Якоби есть тождество Лейбница: оно означает, что операция $[a,\cdot]$ является дифференцированием.

Задача 5.21. Докажите, что алгебра $\operatorname{End}(V)$ с операцией $[a,b] = ab - ba$ является алгеброй Ли.

Задача 5.22. Докажите, что пространство дифференцирований кольца R с операцией $[a,b] = ab - ba$ является алгеброй Ли.

Определение 5.9. Представление алгебры Ли A есть гомоморфизм $A \longrightarrow \operatorname{End} V$, где $\operatorname{End} V$ рассматривается как алгебра Ли. Пространство V называется **пространством представления**. В такой ситуации говорят, что A **действует на пространстве** V.

Задача 5.23 (!). Пусть $V_1, ..., V_n$ – представления алгебры Ли A. Докажите, что $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_n$ снабжено действием A по формуле Лейбница

$$a(b_1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_n) = \\ = a(b_1) \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_n + b_1 \otimes a(b_2) \otimes ... \otimes b_n + ... + b_1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes a(b_n). \quad (5.3)$$

Задача 5.24. Пусть V – представление алгебры Ли A. Докажите, что двойственное пространство V^* снабжено действием A по формуле

$$\langle a(b), \xi\rangle + \langle b, a(\xi)\rangle = 0.$$

Определение 5.10. Пусть A – алгебра Ли, действующая на векторном пространстве V. Вектор $v \in V$ называется a**-инвариантным**, если $a(v) = 0$, и A**-инвариантным,** если $a(v) = 0$ для любого $a \in A$.

Задача 5.25. Пусть A – алгебра Ли, действующая на векторном пространстве V, а $v \in V^{\otimes i} \otimes (V^*)^{\otimes j}$ тензор на V. Докажите, что множество всех $a \in A$, таких, что $a(v) = 0$, является подалгебра Ли в A.

Определение 5.11. Пусть $h \in V^* \otimes V^*$ – скалярное произведение. **Ортогональная алгебра Ли** $\mathfrak{so}(V)$ есть множество всех эндоморфизмов $a \in \operatorname{End} V$, которые удовлетворяют $a(h) = 0$.

Задача 5.26. Докажите, что $\mathfrak{so}(V) = \{a \in \operatorname{End} V \ \ | \ \ h(a\cdot, \cdot) = -h(\cdot, a\cdot)\}$.

Задача 5.27 (!). Пусть форма h невырождена. Постройте изоморфизм $\mathfrak{so}(V) = \Lambda^2 V^*$.

Задача 5.28 (*). Постройте изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^4, +, +, +, -)$ (форма h с сигнатурой $+, +, +, -$) и $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$.

5.5. Аффинные пространства

Определение 5.12. Пусть V – линейное пространство. **Аффинное пространство над** V есть множество A, на котором V действует свободно и транзитивно. В этой ситуации V называется **линеаризацией** A. Действие V на A обозначается $v, a \longrightarrow v + a$.

Определение 5.13. Морфизм $\phi: \ A_1 \longrightarrow A_2$ аффинных пространств есть отображение из A_1 в A_2, которое удовлетворяет $\phi(v+a) = \psi(v) + \phi(a)$, где $\psi: \ V_1 \longrightarrow V_2$ – линейное отображение их линеаризаций. В такой ситуации, ψ называется **линеаризацией** морфизма ϕ.

Задача 5.29. Пусть G – группа отображений из одномерного аффинного пространства над $\mathbb{R}$ в себя, переводящая параллельные переносы в параллельные переносы.

а. Докажите, что G гомеоморфна $\mathbb{R}^2$.

б. Докажите, что G некоммутативная, разрешимая группа.

Задача 5.30 (**). Пусть $\phi: \ A_1 \longrightarrow A_2$ – отображение аффинных пространств над $\mathbb{R}$ размерности больше 1, которое переводит прямые (одномерные аффинные подпространства) в прямые. Докажите, что это морфизм аффинных пространств.

Задача 5.31. Докажите, что пространство связностей на расслоении B над M есть аффинное пространство с линеаризацией $\Lambda^1 M \otimes \operatorname{End} B$.

Задача 5.32. Рассмотрим действие группы $GL(B)$ послойных автоморфизмов B на пространстве связностей $\mathcal{A}_B$.

а. Пусть B одномерно. Докажите, что $GL(B)$ есть мультипликативная группа обратимых функций на M.

б. Докажите, что $GL(B)$ действует аффинными морфизмами на $\mathcal{A}_B$.

в. (!) Проверьте, что $GL(B)$ не сохраняет никакой точки $\mathcal{A}_B$.

г. (!) Пусть $\operatorname{rk} B = 1$, $f \in GL(B)$ – обратимая функция, а ∇ – связность. Докажите, что f переводит ∇ в $\nabla + f^{-1}df$.

Задача 5.33. Докажите, что пространство ортогональных связностей есть аффинное пространство над $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.

Задача 5.34. Пусть B – расслоение на многообразии, а $\psi \in B^{\otimes i} \otimes (B^*)^{\otimes j}$ – тензор над B. Предположим, что существует связность ∇, которая сохраняет ψ.

а. Пусть $A \subset \operatorname{End}(B)$ – пространство всех эндоморфизмов $a \in \operatorname{End}(B)$ таких, что $a(\psi) = 0$ (действие эндоморфизма на тензорах определяется как в (5.3), то есть по формуле Лейбница). Докажите, что A – алгебра Ли.

б. Докажите, что пространство связностей, сохраняющих ψ – аффинное пространство над каким-то линейным пространством S.

в. (!) Докажите, что $S = \Lambda^1 M \otimes A$.