Алгебраическая геометрия 1: максимальные идеалы и лемма Цорна

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сданы 2/3 задач с (*) и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

1.1. Идеалы в кольце полиномов

Замечание. Все кольца в дальнейшем предполагаются коммутативные, с единицей, и $1 \neq 0$. Все идеалы в кольце R по умолчанию предполагаются **нетривиальными**, то есть не равными R.

Определение 1.1. Пусть $I \subset k[t_1, ..., t_n]$ – идеал в кольце полиномов над полем k. Обозначим за $(I) \subset k^n$ **множество общих нулей** I, то есть всех таких точек $(a_1, ..., a_n) \in k^n$, где зануляются все $f \in I$.

Задача 1.1. Докажите, что $V(I)$ – замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ для любого идеала $I \subset \mathbb{R}[t_1, ..., t_n]$.

Определение 1.2. Пусть $Z \subset k^n$ – какое-то подмножество. Определим идеал I_Z, состоящий из всех $f \in k[t_1, ..., t_n]$, которые зануляются во всех точках Z. Такой идеал называется **аннулятором** Z.

Задача 1.2. Найдите (нетривиальный) идеал в $\mathbb{R}[t]$, такой, что $V(I)$ пусто.

Задача 1.3.
а. Для каждого простого p, найдите идеал в $\mathbb{F}_p[t]$ такой, что $V(I)$ пусто.

б. [*] Найдите идеал в $\mathbb{F}_{p^n}[t]$ такой, что $V(I)$ пусто.

Определение 1.3. **Максимальный идеал** есть идеал, который не содержится ни в каком большем.

Задача 1.4. Докажите, что идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда R/I – поле.

Определение 1.4. **Идеал точки** $(a_1, ..., a_n) \in k^n$ есть идеал всех полиномов $f \in k[t_1, ..., t_n]$, которые зануляются в этой точке.

Задача 1.5. Докажите, что идеал точки всегда максимальный.

Задача 1.6 (*). Пусть $[K : \mathbb{Q}]$ – конечное расширение полей. Найдите максимальный идеал I в $\mathbb{Q}[t]$ такой, что $\mathbb{Q}[t]/I \cong K$.

Задача 1.7 (!). Пусть $I \subset k[t_1, ..., t_n]$ – максимальный идеал, такой, что естественное вложение $k \longrightarrow k[t_1, ..., t_n]/I$ – изоморфизм. Докажите, что I – идеал точки.

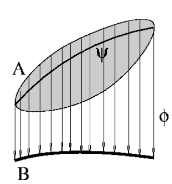
Задача 1.8 (*). Рассмотрим подкольцо R в функциях на $\mathbb{C}$, порожденное функциями $t, e^{\lambda t}$, где t – координата, а $\lambda \in \mathbb{Q}$, для всех рациональных λ. Существует ли максимальный идеал $I \subset R$, такой, что естественное вложение $\mathbb{C} \longrightarrow R/I$ – не изоморфизм?

Замечание. (Слабая) **теорема Гильберта о нулях** утверждает, что для любого идеала $I \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$, множество $V(I)$ общих нулей I непусто.

Задача 1.9. Докажите, что это утверждение равносильно следующему: любой максимальный идеал в $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ является идеалом точки.

1.2. Лемма Цорна

Определение 1.5. Пусть $\phi : A \longrightarrow B$ сюрьективное отображение множеств. **Сечением** отображения ϕ называется отображение $\psi : B \longrightarrow A$, такое, что $\psi \circ \phi = \mathsf{Id}$.



Определение 1.6. **Аксиома выбора** утверждает, что каждое сюрьективное отображение имеет сечение.

Определение 1.7. Пусть $(X, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Если для каких-то $x, y \in X$ имеет место $x \prec y$ либо $y \prec x$, мы говорим, что x и y **сравнимы**. Отношение $\prec$ называется **отношением линейного порядка** (total order), если любые два элемента сравнимы. Множество $(X, \prec)$ с отношением линейного порядка называется **линейно упорядоченное множество**.

Линейно упорядоченные множества также называются **монотонно упорядоченными**, или просто **упорядоченными**.

Определение 1.8. Пусть $(X, \prec)$ – линейно упорядоченное множество, а $Y \subset X$ – его подмножество. Элемент $y_0 \in Y$ называется **минимальным**, если для любого $y \in Y$, имеем $y_0 \preccurlyeq y$. Линейно упорядоченное множество называется **вполне упорядоченным** (well-ordered set), если любое его подмножество имеет минимальный элемент. Отношение порядка на таком множестве называется **отношение полного порядка**.

Определение 1.9. **Начальным элементом** вполне упорядоченного множества называется его минимальный элемент. **Отрезком** линейно упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется подмножество $Y \subset X$ такое, что для любых $x, z \in Y$, и любого $y \in X$ такого, что $x \prec y \prec z$, имеем $y \in Y$. **Начальным отрезком** вполне упорядоченного множества называется отрезок, содержащий минимальный элемент.

Определение 1.10. Два вполне упорядоченных множества называются **изоморфными**, если между ними есть биекция, сохраняющая порядок. Классы изоморфизма вполне упорядоченных множеств называются **ординалами**, или же **ординальными числами**.

Замечание. Ординалы можно складывать (для этого надо взять объединение $X \coprod Y$ двух непересекающихся вполне упорядоченных множеств, и положить $X \prec Y$). Кроме того, ординалы можно умножать. Полный порядок на произведении $X \times Y$ задается так:

$$(x, y) \prec (x', y') \text{ если } x \prec x', \text{ либо } x = x', y \prec y'.$$

Задача 1.10 (*). Докажите, что сложение ординалов не коммутативно.

Задача 1.11. Докажите, что сложение ординалов ассоциативно.

Задача 1.12 (*). Коммутативно ли умножение ординалов?

Задача 1.13. Докажите, что умножение ординалов ассоциативно.

Задача 1.14 (!). Пусть X, Y – вполне упорядоченные множества. Докажите, что X изоморфно начальному отрезку Y, либо Y изоморфно начальному отрезку X.

Задача 1.15. Докажите, что такой изоморфизм определен однозначно.

Определение 1.11. **Теорема Цермело** утверждает, что любое множество может быть вполне упорядочено.

Задача 1.16. Выведите из теоремы Цермело аксиому выбора.

Указание. Возьмите минимальный элемент в $\psi^{-1}(b)$.

Определение 1.12. Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Элемент $x \in S$ называется **максимальным**, если не существует $y \in S$ с $x \prec y$. Для подмножества $S_1 \subset S$ и $x \in S$, мы пишем $S_1 \preccurlyeq x$, если для каждого $\xi \in S_1$ имеем $\xi \preccurlyeq x$. **Лемма Цорна** утверждает следующее. Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, причем для любого вполне упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$ найдется элемент $\xi \in S$ такой, что $S_1 \preccurlyeq \xi$. Тогда в S найдется максимальный элемент.

Задача 1.17 (!). Выведите из леммы Цорна теорему Цермело.

Указание. Пусть A – множество, на котором мы хотим найти полный порядок. Рассмотрите в качестве S множество подмножеств A, снабженных полным порядком, а в качестве $\prec$ отношение "X есть начальный отрезок Y".

Задача 1.18 (*). Выведите теорему Цермело из аксиомы выбора.

Задача 1.19 (*). Выведите из аксиомы выбора лемму Цорна

Замечание. В дальнейшем, при сдаче листков **вы можете пользоваться леммой Цорна и теоремой Цермело без доказательства.**

1.3. Применения леммы Цорна

Задача 1.20 (!). Пусть даны два множества A и B. Выведите из аксиомы выбора, что либо A изоморфно подмножеству B, либо B изоморфно подмножеству A.

Задача 1.21. Докажите теорему Кантора-Бернштейна: для любых двух множеств A и B, если A равномощно подмножеству B, а B равномощно подмножеству A, то они равномощны.

Задача 1.22. Пусть $I \subset R$ – идеал в кольце. Докажите, что I содержится в максимальном идеале.

Задача 1.23 (!). Докажите, что если существует сюрьекция $A \longrightarrow B$ и сюрьекция $B \longrightarrow A$, то эти множества равномощны.

Определение 1.13. Пусть V – векторное пространство. **Базис Коши-Гамеля** есть максимальный набор линейно независимых векторов V.

Задача 1.24. Выведите из леммы Цорна существование базиса Коши-Гамеля в любом векторном пространстве.

Задача 1.25 (!). Пусть S – базис Коши-Гамеля в W, а S_1 – набор векторов, линейные комбинации которых порождают W. Постройте сюрьекцию $S_1 \times \mathbb{N} \longrightarrow S$

Указание. Воспользуйтесь аксиомой выбора.

Задача 1.26 (!). Докажите, что для любого бесконечного множества A, A равномощно $A \times \mathbb{N}$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Цермело.

Задача 1.27 (!). Пусть S, S' – два базиса Коши-Гамеля. Докажите, что они равномощны.

Указание. Примените все предшествующие задачи, начиная с задачи 1.23.

1.4. Несчетномерные векторные пространства

Определение 1.14. Бесконечномерное векторное пространство называется **несчетномерным**, если его базис Коши-Гамеля несчетен.

Задача 1.28. Докажите, что $\mathbb{C}$ несчетномерно, как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

Задача 1.29 (*). Докажите, что $V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$ несчетномерно, если V бесконечномерно.

Задача 1.30 (*). Докажите, что естественное вложение $V \longrightarrow V^{**}$ – не изоморфизм ни для какого бесконечномерного V.

Определение 1.15. Для любого поля k, обозначим за $k(t)$ поле рациональных функций от одной переменной над k.

Задача 1.31. Докажите, что любой набор векторов вида $\frac{1}{t-a_i} \in k(t)$ линейно независим над k, если все a_i попарно различны.

Задача 1.32. Докажите, что $\mathbb{C}(t)$ несчетномерно над $\mathbb{C}$.

Задача 1.33 (*). Докажите, что пространство непрерывных функций на отрезке несчетномерно над $\mathbb{R}$. Докажите, что гильбертово пространство $L^2(S^1)$ несчетномерно над $\mathbb{R}$.

1.5. Доказательство теоремы Гильберта о нулях

Задача 1.34. Пусть $I \subset \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ – максимальный идеал. Докажите, что либо естественное вложение $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/I$ – изоморфизм, либо существует $\mathbb{C}$-линейное вложение $\mathbb{C}(t) \hookrightarrow \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/I$.

Задача 1.35. Докажите, что $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ счетномерно над $\mathbb{C}$. Выведите из этого, что $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/I$ счетномерно.

Задача 1.36. Докажите, что у $\mathbb{C}$ нет нетривиальных счетномерных расширений.

Задача 1.37. Выведите из этого, что $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/I = \mathbb{C}$ для любого максимального идеала I.

Задача 1.38 (!). Докажите, что любой максимальный идеал в $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ является идеалом точки.

Задача 1.39 (*). Докажите, что любой максимальный идеал в $k[z_1, ..., z_n]$ является идеалом точки, для любого алгебраически замкнутого поля характеристики 0.

Задача 1.40 (*). Докажите, что любой максимальный идеал в $k[z_1, ..., z_n]$ является идеалом точки, для любого алгебраически замкнутого поля характеристики $p > 0$.

Задача 1.41. Пусть I – идеал в $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$, а $F \in \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ – функция, которая не зануляется нигде в $V(I)$. Докажите, что для каких-то полиномов $a \in I$ и b, имеем $1 = a + Fb$.

1.6. Трюк Рабиновича и локализация

Задача 1.42. ("хитрый трюк Рабиновича") Пусть $I \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ какой-то идеал, а F – полином, такой, что $F = 0$ всюду на $V(I)$. Рассмотрим идеал $I' \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_{n+1}]$, порожденный всеми $\psi \in I$ и функцией $\phi := z_{n+1}F - 1$. Докажите, что $1 \in I'$.

Указание. Убедитесь, что I' не имеет общих нулей в $\mathbb{C}^{n+1}$, а следовательно, тривиален.

Определение 1.16. Локализацией кольца R по $F \in R$ называется кольцо, формально порожденное элементами вида a/F^n, где $a \in R$, и с соотношениями $a/F^n \cdot b/F^m = ab/F^{n+m}$, $a/F^n + b/F^m = \frac{aF^m + bF^n}{F^{n+m}}$ и $aF^k/F^{k+n} = a/F^n$.

Задача 1.43. Рассмотрим кольцо $R[F^{-1}]$, полученное из R локализацией по $F \in R$. Докажите, что оно ненулевое тогда и только тогда, когда F не нильпотент.

Указание. $R[F^{-1}]$ есть кольцо полиномов над R, профакторизованное по соотношению $Ft = 1$. Если оно нулевое, это значит, что $1 = (1 - Ft)P$ для какого-то полинома $P = \sum_i a_i t^i$ Раскрыв скобки, получите $Fa_{i-1} = a_i$, и $a_0 = 1$.

Определение 1.17. Простой идеал есть такой идеал, что в факторе по нему нет делителей нуля.

Задача 1.44 (!). Постройте биекцию между простыми идеалами в $A[F^{-1}]$ и простыми идеалами A, не содержащими F.

Задача 1.45 (!). Пусть A – кольцо без нильпотентов. Докажите, что пересечение простых идеалов A равно 0.

Задача 1.46. ("хитрый трюк Рабиновича, часть 2") Пусть $I \subset \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ – идеал, а F зануляется везде на $V(I)$. Докажите, что $F^n \in I$.

Указание. Рассмотрим эпиморфизм (сюрьективный гомоморфизм)

$$\mathbb{C}[t_1, ..., t_{n+1}] \xrightarrow{\xi} R,$$

где $R = \left(\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I\right)[F^{-1}]$, переводящий $t_1, ..., t_n$ в себя, а t_{n+1} в F^{-1}. Проверьте, что $\xi(I') = 0$ и выведите из этого, что $R = 0$. Дальше примените предыдущую задачу.

Задача 1.47. Пусть I – идеал в $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$. Докажите, что $I_{V(I)} = I$ тогда и только тогда, когда в $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]/I$ нет нильпотентов.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.48 (!). ("сильная теорема Гильберта о нулях"). Пусть I – простой идеал в кольце полиномов над $\mathbb{C}$. Докажите, что $I_{V(I)} = I$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.